• $h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

• $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x - 1 = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)

• $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2°/ D'après le tableau de variations de h on a : $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$ d'où $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq 0$ et par conséquent $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq x + 1$.

B) 1°/ • $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbf{R}$

• $x \mapsto x \cdot e^{2x}$ est continue sur $\mathbf{R}$

d'où g est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ (quotient de deux fonctions continues)

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} = 1 = g(0)$$

d'où g est continue en $x_0 = 0$.

Conclusion : g est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ $e^{-2x} - g(x) = e^{-2x} - \frac{e^x - 1}{x \cdot e^{2x}} = \frac{e^{-2x}(xe^{2x}) - (e^x - 1)}{xe^{2x}} = \frac{x - e^x + 1}{xe^{2x}} = \frac{-h(x)}{xe^{2x}}$

or $\forall x > 0$, $xe^{2x} > 0$ et $h(x) > 0$ d'où $\forall x > 0$ on a : $e^{-2x} - g(x) < 0$.

Conclusion : $\forall x > 0$, $e^{-2x} < g(x)$.

3°/a) $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{e^x(xe^{2x}) - (e^x - 1)(e^{2x} + 2xe^{2x})}{(xe^{2x})^2}$